Gráficos de Controle

Ramon Santos Nascimento

Universidade Federal Rural de Pernambuco

ramonsantos.pe@gmail.com

18 de Junho de 2015

Agenda

O que é Controle Estatístico de Processo?

Definição

O **Controle Estatístico do Processo (CEP)** *é uma técnica estatística que envolve a coleta, a organização e a interpretação de dados para o controle de um processo de produção(ou serviço), com o objetivo de controlar e melhorar continuamente a qualidade do produto.*

Um Breve Histórico Sobre CEP

Década de 20

Em 1924 o Dr. Walter A. Shewhart escreveu um memorando mostrando um moderno gráfico(carta) de controle. Harold F. Dodge e Harry G. Roming trabalharam no desenvolvimento da amostragem com base estatística e métodos de inspeção.

Segunda Guerra Mundial

O CEP foi usando largamente na industria estadunidense como parte importante no esforço de guerra.

Pós-guerra

Os japoneses aplicam CEP em sua industria, e já na década de 70, abrem vantagem competitiva.

Onde é possível aplicar CEP?

- Planejamento e Desenvolvimento de Produtos;
- Determinar Capacidade de um Processo de Fabricação;
- Investigar Melhorias no Processo;
- Fornecer Confiabilidade e outros Dados de Desempenho de Produtos ou Serviços.

Ferramentas importantes de CEP

- Histograma;
- Gráfico de Pareto;
- Diagrama de causa-e-efeito;
- Diagrama de concentração de defeito;
- Diagrama de dispersão;
- Folha de verificação;
- **Gráfico de controle.**

Histograma

Definição

Um histograma é a representação gráfica, em colunas, de um conjunto de dados previamente tabulado e dividido em classes uniformes.

Histograma

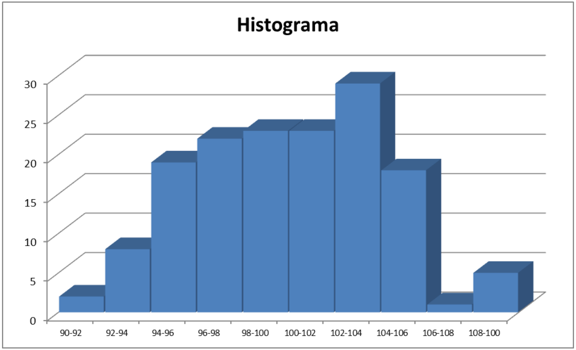

Figura: Histograma

Gráfico de Pareto

Definição

O diagrama de Pareto é um gráfico de colunas que ordena as frequências das ocorrências, da maior para a menor, permitindo uma fácil visualização e identificação dos problemas mais importantes, possibilitando a concentração de esforços sobre os mesmos.

Obs.

Deriva do Princípio de Pareto(80/20).

Gráfico de Pareto

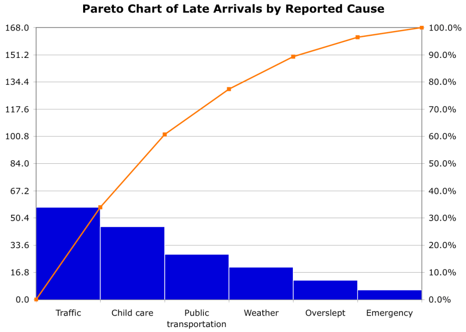

Figura: Gráfico de Pareto

Causas Casuais

- Em qualquer processo de produção, uma certa quantidade de variabilidade(ou ruído de fundo) natural sempre existirá. Esse ruído é o efeito cumulativo de muitas causas pequenas, essencialmente inevitáveis.
- Um processo que esteja operando apenas com causas casuais de variação presente é dito estar *sob controle estatístico*.

Causas Atribuídas

- Outros tipos de variabilidade podem ocasionalmente estar presentes na saída de um processo. Essa variabilidade nas características-chave da qualidade geralmente aparecem de três fontes:
  - máquinas não propriamente ajustadas;
  - erros dos operadores;
  - matérias-primas defeituosas.
- Tal variabilidade é geralmente grande quando comparada ao ruído de fundo, representando usualmente um nível inaceitável de desempenho de processo.

Objetivos dos Gráficos de Controle

- Um importante objetivo do CEP é detectar a ocorrência de *causas atribuídas* no processo, de modo que uma *investigação do processo* e uma *ação corretiva* possam ser executadas antes que muitas unidades não-conformes sejam fabricadas;
- O gráfico de controle é uma técnica de monitoração em tempo real do processo, largamente usada para essa finalidade.

Sobre o Gráfico de Controle

- É uma disposição gráfica de uma característica da qualidade;
- Atualizado em intervalos regulares de tempo;
- A linha horizontal central representa o valor médio da característica(LC);
- A linha horizontal superior representa o valor máximo da característica(LSC);
- A linha horizontal inferior representa o valor mínimo da característica(LIC).

Sobre o Gráfico de Controle

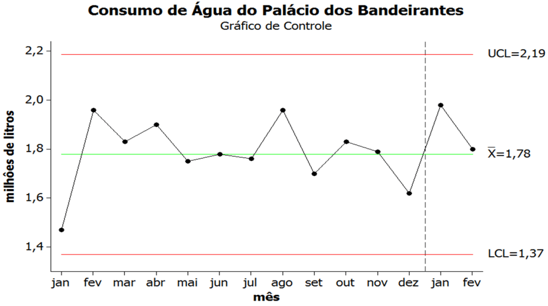

Figura: Gráfico de Controle Típico

Sobre o Gráfico de Controle

- Se todos os pontos estão dentro dos limites de controle mas estão dispostos de forma não aleatória, isso é uma indicação de que o processo está fora de controle;
- Essencialmente, o gráfico de controle é um teste de hipótese de que o processo está em um estado de controle estatístico.

Modelo de Gráfico de Controle

Seja W uma estatística da amostra que mede uma característica de qualidade e suponha que a média seja μ_w e o desvio-padrão seja σ_w, temos:

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_w + k\sigma_w \\ LC &= \mu_w \\ LIC &= \mu_w - k\sigma_w \end{aligned}$$

onde k é a distância dos limites de controle a partir da linha central(geralmente $k = 3$), expressa em unidade de desvio-padrão.

Popularidade dos Gráficos de Controle

Há, no mínimo, cinco razões para sua popularidade. São elas:

- É uma técnica comprovada para melhoria da produtividade;
- São efetivos na prevenção de defeitos;
- Previnem ajustes desnecessários no processo;
- Fornecem informação sobre diagnósticos;
- Fornecem informações sobre a capacidade de processo.

Projetando um Gráfico de Controle

Na fabricação de anéis de pistão de motores automotivos, o diâmetro interno dos anéis é uma característica de qualidade. O diâmetro médio interno do anel no processo é 74 milímetros e sabe-se que o desvio-padrão do diâmetro do anel é 0,001 milímetros.

A cada hora, uma amostra aleatória de cinco anéis é retirada, o diâmetro médio ($\bar{x}$) do anel da amostra é calculado e plotado.

Projetando um Gráfico de Controle

O próximo passo é determinar os limites:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,001}{\sqrt{5}} = 0,0045$$

Usando o teorema do limite central para considerar que $\bar{X}$ seja distribuído de forma aproximadamente normal, espera-se que, aproximadamente, 100(1 - α)% dos diâmetros médios $\bar{X}$ das amostras caíssem entre 74 + $z_{\alpha/2}$(0,0045) e 74 - $z_{\alpha/2}$(0,0045).

Projetando um Gráfico de Controle

Um valor padrão para $z_{\alpha/2}$ é 3, então temos:

$$LSC = 74 + 3x(0,0045) = 74,0135$$
$$LIC = 74 - 3x(0,0045) = 73,9865$$

Tipos de Gráficos de Controle

- $\bar{X}$ e R;
- $\bar{X}$ e S;
- CUSUM;
- EWMA.

Tipos de Gráficos de Controle

Quando lidando com uma característica de qualidade que pode ser expressa como uma medida, é comum monitorar tanto o valor médio quanto sua variabilidade.

Pode-se usar o gráfico $\bar{X}$ com o R(Amplitude) ou o $\bar{X}$ com o S(Desvio-Padrão).

Gráficos $\bar{X}$ e R

- **$\bar{X}$ e R;**
- $\bar{X}$ e S;
- CUSUM;
- EWMA.

Gráficos $\bar{X}$ e R

- Amplitude e Média;
- Baseado na Distribuição Normal;
- Indicado quando o tamanho da amostra é constante e relativamente pequeno(menor que 10).

Gráficos $\bar{X}$ e R

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle $\bar{X}$ são

$$
\begin{aligned}
LSC &= \bar{\bar{x}} + A_2\bar{r} \\
LC &= \bar{\bar{x}} \\
LIC &= \bar{\bar{x}} - A_2\bar{r}
\end{aligned}
$$

onde $\bar{r}$ é a aplitude média e a constante A_2 é tabelada, para vários tamanhos de amostra.

Gráficos $\bar{X}$ e R

68

ANEXO A - Fatores para o cálculo dos limites de controle (**3σ**) para os gráficos: $\overline{X}$, R e s

n	Gráfico para a Média			Gráfico para o Desvio Padrão						Gráfico para a Amplitude						
	Fatores para os Limites de Controle			Fatores para a Linha Central		Fatores para os Limites de Controle				Fatores para a Linha Central		Fatores para os Limites de Controle				
	A	A_2	A_3	c_4	$1/c_4$	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2,121	1,880	2,659	0,7979	1,2533	0	3,627	0	2,606	1,128	0,8865	0,953	0	3,686	0	3,267
3	1,732	1,023	1,954	0,8862	1,1284	0	2,568	0	2,276	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,575
4	1,500	0,729	1,628	0,9213	1,0854	0	2,266	0	2,088	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,282
5	1,342	0,577	1,427	0,9400	1,0638	0	2,089	0	1,964	2,326	0,4299	0,864	0	4,918	0	2,115
6	1,225	0,483	1,287	0,9515	1,0510	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,0423	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,3698	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099	0,9650	1,0363	0,185	1,815	0,179	1,751	2,847	0,3512	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	0,337	1,032	0,9693	1,0317	0,239	1,761	0,232	1,707	2,970	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,0281	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927	0,9754	1,0252	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,3152	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,266	0,886	0,9776	1,0229	0,354	1,646	0,346	1,610	3,258	0,3069	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850	0,9794	1,0210	0,382	1,618	0,374	1,585	3,336	0,2998	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817	0,9810	1,0194	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,223	0,789	0,9823	1,0180	0,428	1,572	0,421	1,544	3,472	0,2880	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,212	0,763	0,9835	1,0168	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,0157	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,194	0,718	0,9854	1,0148	0,482	1,518	0,475	1,496	3,640	0,2747	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,187	0,698	0,9862	1,0140	0,497	1,503	0,490	1,483	3,689	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,0133	0,510	1,490	0,504	1,470	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,0126	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,647	0,9882	1,0119	0,534	1,466	0,528	1,448	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,0114	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,0109	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,0105	0,565	1,435	0559	1,420	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

Para n > 25

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}},\ A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}},\ c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3},\ B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}},\ B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}},\ B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}},\ B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Figura: Fatores para a Construção do Gráficos

Gráficos $\bar{X}$ e R

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle R são

$$LSC = D_4\bar{r}$$
$$LC = \bar{r}$$
$$LIC = D_3\bar{r}$$

onde $\bar{r}$ é amplitude média da amostra e as constantes D_3 e D_4 também são tabeladas.

Exemplo $\bar{X}$ e R

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6
	N da Amostra	x1	x2	x3	x4	x5
1	1	33	29	31	32	33
2	2	33	31	35	37	31
3	3	35	37	33	34	36
4	4	30	31	33	34	33
5	5	33	34	35	33	34
6	6	38	37	39	40	38
7	7	30	31	32	34	31
8	8	29	39	38	39	39
9	9	28	33	35	36	43
10	10	38	33	32	35	32
11	11	28	30	28	32	31
12	12	31	35	35	35	34
13	13	27	32	34	35	37
14	14	33	33	35	37	36
15	15	35	37	32	35	39
16	16	33	33	27	31	30
17	17	35	34	34	30	32
18	18	32	33	30	30	33
19	19	25	27	34	27	28
20	20	35	35	36	33	30

Figura: Entradas de dados

Exemplo $\bar{X}$ e R

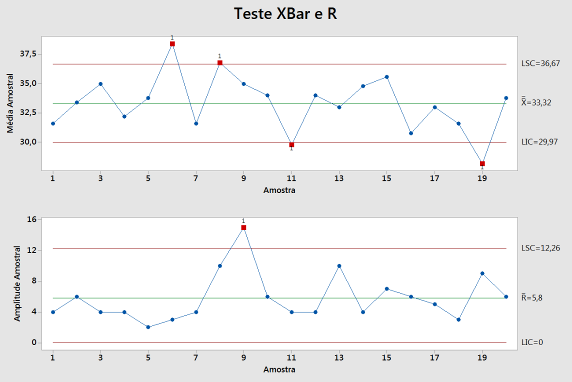

Figura: Gráfico $\bar{X}$ e R

Gráficos $\bar{X}$ e S

- $\bar{X}$ e R;
- **$\bar{X}$ e S;**
- CUSUM;
- EWMA.

Gráficos $\bar{X}$ e S

EM vez de se basear em gráficos de controle para amplitudes, uma abordagem mais moderna é calcular o desvio-padrão de cada subgrupo e plotar esses desvios-padrão para monitorar o desvio-padrão σ do processo.

Gráficos $\bar{X}$ e S

- Desvio-Padrão e Média;
- Baseado na Distribuição Normal;
- Indicado quando o tamanho da amostra é variável e relativamente grande(maior que 10);
- É recomendado o uso de computador para fazer os cálculos.

Gráficos $\bar{X}$ e S

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle $\bar{X}$ são

$$
\begin{aligned}
LSC &= \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} \\
LC &= \bar{\bar{x}} \\
LIC &= \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}
\end{aligned}
$$

onde a constante A_3 é tabelada, para vários tamanhos de amostra.

Gráficos $\bar{X}$ e S

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle S são

$$LSC = D_4\bar{s}$$
$$LC = \bar{s}$$
$$LIC = D_3\bar{s}$$

onde as constantes $D_3\bar{r}$ e $D_4\bar{r}$ são tabeladas.

Exemplo $\bar{X}$ e S

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6
	N da Amostra	x1	x2	x3	x4	x5
1	1	33	29	31	32	33
2	2	33	31	35	37	31
3	3	35	37	33	34	36
4	4	30	31	33	34	33
5	5	33	34	35	33	34
6	6	38	37	39	40	38
7	7	30	31	32	34	31
8	8	29	39	38	39	39
9	9	28	33	35	36	43
10	10	38	33	32	35	32
11	11	28	30	28	32	31
12	12	31	35	35	35	34
13	13	27	32	34	35	37
14	14	33	33	35	37	36
15	15	35	37	32	35	39
16	16	33	33	27	31	30
17	17	35	34	34	30	32
18	18	32	33	30	30	33
19	19	25	27	34	27	28
20	20	35	35	36	33	30

Figura: Entradas de dados

Exemplo $\bar{X}$ e S

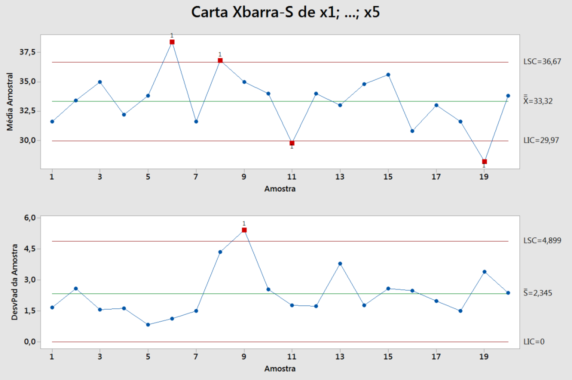

Figura: Gráfico $\bar{X}$ e S

Gráfico de Controle para Soma Cumulativa

- $\bar{X}$ e R;
- $\bar{X}$ e S;
- **CUSUM**;
- EWMA.

Gráfico de Controle para Soma Cumulativa

- Uma grande desvantagem dos gráficos anteriores é que o gráfico é relativamente insensível a pequenas mudanças no processo(algo da ordem de 1,5σ ou menos);
- A razão disso é que os modelos anteriores usam somente informações no último ponto plotado;
- Os gráficos CUSUM são particularmente efetivos com amostras de tamanho 1 (como na industria química e de processos).

Gráfico de Controle para Soma Cumulativa

O gráfico CUSUM plota as somas cumulativas dos desvios dos valores amostrais em relação ao valor-alvo

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} (\bar{X}_j - \mu_0)$$

onde μ_0 é o alvo da média do processo e $\bar{X}_j$ é a média da j-ésima.

Gráfico de Controle para Soma Cumulativa

- Se o processo permanecer sob controle no valor alvo μ_0, a soma cumulativa definida na equação anterior deve flutuar em torno de zero;
- Consequentemente, se uma tendência se desenvolver nos pontos plotados para cima ou para baixo, deve-se considerar isso como uma evidência de causa atribuída.

Limites no CUSUM

Há duas abordagens gerais para imaginar limites de controle para CUSUMs:

- Máscara em V;
- CUSUM Tabular.

Máscara em V

Máscara em *V* é um entalhe em forma de *V* em um plano que pode ser colocado em diferentes localizações em um gráfico.

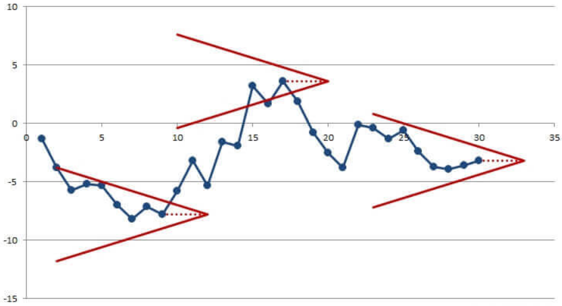

Figura: Exemplo da Máscara em V

CUSUM Tabular

Seja $S_H(i)$ um CUSUM unilateral superior e $S_L(i)$ um CUSUM unilateral inferior, ambos para o período i. Essas grandezas são calculadas a partir de

$$S_H(i) = max[0, \bar{X}_i - (\mu_0 + K) + S_H(i-1)]$$
$$S_L(i) = max[0, (\mu_0 - K) - \bar{X}_i + S_L(i-1)]$$
$$K = \frac{\Delta}{2} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$$

em que os valores iniciais $S_H(0) = S_L(0) = 0$.

Exemplo CUSUM

102,0	98,5	101,3	96,7
94,8	99,0	98,7	101,2
98,3	97,7	101,1	101,4
98,4	100,0	98,4	102,0
102,0	98,1	97,0	102,9

Tabela: Amostras

Onde cada célula representa uma amostra(de cima para baixo e da esquerda para a direita).

Exemplo CUSUM

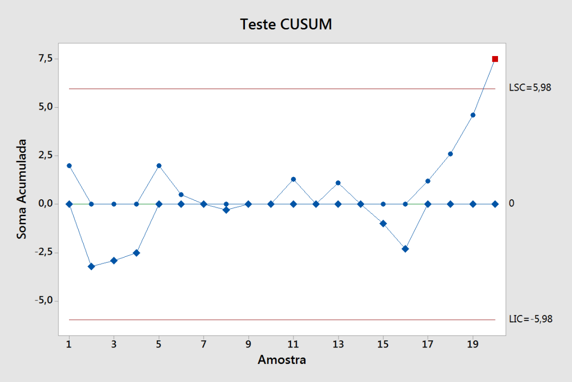

Figura: Gráfico CUSUM

Média Móvel Ponderada Exponencialmente

- $\bar{X}$ e R;
- $\bar{X}$ e S;
- CUSUM;
- **EWMA**.

Média Móvel Ponderada Exponencialmente

- EWMA - Exponentially-Weighted Moving Average;
- Usa a média dos dados recentes para suavizar o ruído nos dados e gerar uma estimativa melhor;
- Os pontos plotados em um gráfico EWMA não são independentes;
- λ $(0 < \lambda \leq 1)$ representa os pesos;
- O valor de λ é geralmente escolhido a partir da faixa $(0,1 < \lambda < 0,5)$.

Média Móvel Ponderada Exponencialmente

A equação de atualização de EWMA é dada por

$$Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1 - \lambda) Z_t - 1$$

Média Móvel Ponderada Exponencialmente

Os limites são colocados a três desvios-padrão em torno da médio da estatística plotada Z_t.

$$
\begin{aligned}
LSC &= \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}[1-(1-\lambda)^{2t}]} \\
LC &= \mu_0 \\
LIC &= \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}[1-(1-\lambda)^{2t}]}
\end{aligned}
$$

Média Móvel Ponderada Exponencialmente

- Os limites não são de igual largura em torno da linha central;
- Os limites são calculados a partir da variância de Z_t e ela muda com o tempo;
- Para t grande, a variância de Z_t converge para

$$\lim_{t \to \infty} V(Z_t) = \frac{\sigma^2}{n}(\frac{\lambda}{2 - \lambda})$$

Exemplo EWMA

102,0	98,5	101,3	96,7
94,8	99,0	98,7	101,2
98,3	97,7	101,1	101,4
98,4	100,0	98,4	102,0
102,0	98,1	97,0	102,9

Tabela: Amostras

onde cada célula representa uma amostra(de cima para baixo e da esquerda para a direita)

Exemplo EWMA

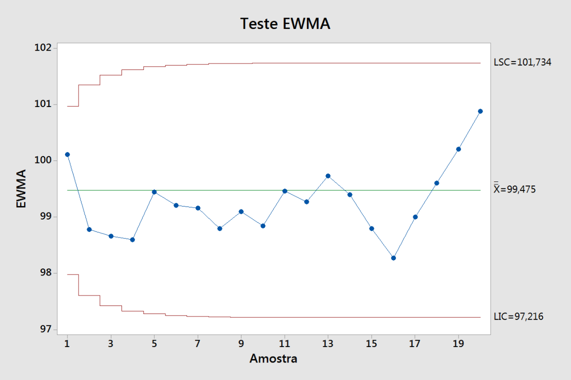

Figura: Gráfico EWMA

Algumas Ferramentas de Apoio

- Minitab;
  - http://www.minitab.com/pt-br/products/minitab/features/
- R;
  - http://www.r-project.org/
  - http://cran.r-project.org/web/packages/qcc/index.html
  - http://www.rstudio.com/products/rstudio/
- Microsoft Excel.
  - https://products.office.com/pt-br/excel

Minitab

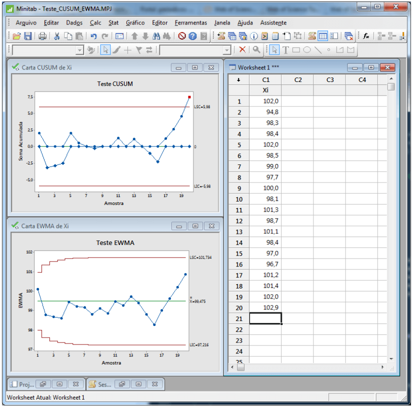

Figura: Aspecto do Minitab

Referências Bibliográficas

- Douglas C. Montgomery, George C. Runger
  Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros.
  LTC, 2009.

- David Levine, David Stephan, Timothy Krehbiel, Mark Berenson
  Estatística - Teoria e Aplicações usando o Microsoft Excel.
  LTC, 2005.

- Mateus Kappel, Aurélia Rodrigues
  O uso do gráfico de controle $\bar{X}$ e R no monitoramento do volume de envase de refrigerante.
  FAMAT em Revista, 10:21–32, 2008.

Dúvidas

Dúvidas?

Obrigado

Obrigado!